РОЗДІЛ 4
МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 330.4

DOI: https://doi.org/10.32782/2304-0920/1-91-11

Возняк О. Г.
Західноукраїнський національний університет
Голубник О. Р.
Львівський національний університет імені Івана Франка

ПОБУДОВА ЕКОНОМІЧНИХ ЕМПІРИЧНИХ ФОРМУЛ МЕТОДОМ ТАБЛИЧНИХ РІЗНИЦЬ

У статті проаналізовано роль математичного дослідження економічних явищ та процесів. Розглянуто еволюцію наукових досліджень у сфері математичної економіки. Визначено необхідність встановлювати функціональну залежність між даними величинами при дослідженні соціально-економічних явищ та процесів. Встановлено, що незважаючи на великий науковий вклад з проблем побудови та методів розв'язування економічних задач, що містять емпіричні формули економічних ситуацій, цей напрям вимагає подальшого дослідження та математичного опису нових економічних ситуацій. Запропоновано методику побудови економічних емпіричних формул методом табличних різниць. Сформульовано теореми для побудови емпіричних функцій: $y = ax + b$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Побудовано оптимальні плани виробничих процесів з використанням розглянутих теорем. Запропоновано метод вибраних точок для визначення параметрів економічної моделі, яка описує виробничий процес.

Ключові слова: емпіричні формули, економічна модель, емпіричні таблиці, різниця першого порядку Δy, різниця другого порядку $\Delta^2 y$, різниця n-го порядку $\Delta^n y$, метод табличних різниць, метод вибраних точок, квадратична емпірична функція, скінченна різниця.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Математика в економіці застосовується понад 150 років. Найперші математичні міркування сприймалися скептично і не знаходили застосування. Так тривалий час залишалися майже непомітною робота французького математика А. Курно (1801–1877), яку сьогодні розглядають як поворотний пункт у розвитку математичної економіки. Не можна згадати одного з найоригінальніших математиків періоду раннього розвитку математичної економіки – пруського економіста Генріха Госсена (1810–1858). Він сформулював закон, відомий як «перший закон Госсена»: «*У процесі збільшення кількості споживаного товару або послуги його корисність від споживання кожної додаткової одиниці зменшується*».

Математичний вклад у вирішення економічних проблем А. Курно й Г. Госсена здійснюється на основі теорії дійсних функцій. Аналіз дійсної змінної – це фундаментальна математична дисципліна, за допомогою якої зроблено перші кроки у застосуванні математики в економіці.

Французький економіст Л. Вальрас (1834–1910) сформулював проблему існування загальних рівноваг ринку, розв'язування якої веде до системи лінійних і нелінійних рівнянь. Існування єдиного розв'язку приводить до визначників, які вивчаються у лінійній алгебрі.

Сучасна економічна теорія пов'язана з теорією ймовірностей, статистикою, теорією стохастичних процесів тощо. Питаннями економіки цікавився і Мирон Зарицький (1889–1961), професор Львівського університету ім. Івана Франка. Про це свідчить його стаття «*Сучинники кореляції в теорії математичної статистики*» (Збірник математично-природописно-лікарської секції Наукового товариства ім. Т. Шевченка у Львові. Том XXXI. 1937). Ця стаття присвячена спробі аналізу балансів кооператорів Тернопільської області. У своїй праці він подає фрагменти із застосування математичної статистики до економіки.

Для економіки математика важлива і як методологічна наука. Математика відіграє важливу роль тоді, коли із спостережень за явищами, об'єктами економічної дійсності необхідно вивести закономірності, а з них отримати висновки, записані у вигляді формул, рівнянь.

Мета статті. Головною метою цієї роботи є розроблення методики побудови економічних емпіричних формул методом табличних різниць.

Постановка проблеми. Під час проведення наукових експериментів, а також спостережень у виробничій практиці досить часто доводиться встановлювати функціональну залежність між даними величинами. Нехай, наприклад, вивчаючи функціональну залежність між величинами x і y ми можемо зібрати певні дані значення величини y при $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$, ..., $x = x_n$ з відрізка $[a;b]$. Користуючись цими даними потрібно побудувати аналітичний вираз (формулу) $\overline{y}(x)$, який би наближав функцію $y(x)$ на всьому відрізку $[a;b]$ до аналітичного виразу. Формули, які дістають на основі аналізу дослідних даних, називають *емпіричними*. Емпіричну формулу подають у вигляді $\overline{y}(x) = f(x, a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, де a_1, a_2, a_3, ..., a_n – деякі параметри. *Емпіричні формули – це математичні формули, що виражають зв'язок між змінними величинами, встановленими на основі дослідів, експериментів.* Аналітичний вигляд емпіричних формул можна вивести з фізичних, хімічних, економічних та інших залежностей. При цьому числові значення визначаються лише за допомогою дослідних даних.

Емпіричні формули містяться, наприклад, в наступних сформульованих задачах.

Задача 1. Опір дороги руху автомобіля, швидкість якого v, виражається такими формулами:

а) суха горизонтальна дорога з твердим покриттям: $f = 24 - \frac{2}{3}v + \frac{1}{30}v^2$;

б) слизька дорога з твердим покриттям: $f = 28 - \frac{1}{4}v + \frac{1}{50}v^2$;

в) мокра грунтова дорога: $f = 36{,}5 - \frac{3}{4}v + \frac{1}{30}v^2$.

При якій швидкості на кожній дорозі опір буде найменшим? [2, с. 27].

Задача 2. Залежність валового доходу на 100 га сільськогосподарських угідь Львівської області та розміром площі цих угідь приймає вигляд $y = 9{,}19 + 8{,}80x - 1{,}46x^2$, де x – площа сільськогосподарських угідь (в тис. га), y – валовий дохід на 100 га сільськогосподарських угідь (в тис. крб.). При якій площі господарство матиме найбільший дохід? [1, с. 108].

Як бачимо, квадратичні емпіричні функції можуть описувати різні економічні ситуації. Незважаючи на великий науковий вклад з проблем побудови та методів розв'язування економічних задач, що містять емпіричні формули економічних ситуацій, вимагають подальшого дослідження та математичного опису нових економічних ситуацій, яких у нас безмежна кількість на кожному підприємстві чи виробництві, причому одна і та сама економічна проблема залежить від місця розташування підприємства, об'єму підприємства, від різних аргументів, що описуються математичною моделлю по різному. Тому економічна наука потребує мати в запасі чим по більше досліджених емпіричних формул.

Виклад основного матеріалу. У процесі вивчення різних питань природознавства, економіки, техніки, соціології, педагогіки доводиться на основі великої кількості дослідних даних виявити суттєві фактори, які впливають на досліджуваний об'єкт, а також встановити форму зв'язку між різними зв'язаними між собою величинами. При розв'язуванні таких прикладних задач часто виникає ситуація, коли аналітичний вигляд функцій, який задає функціональну залежність, невідомий, але ця функція задається таблично або графічно.

Нехай у результаті досліджень дістали таку таблицю деякої функціональної залежності:

Таблиця 1

x	x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	x_{n-1}	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_i	...	y_{n-1}	y_n

Такі таблиці отримують в результаті спостереження, дослідів (експериментів), тому їх називають *емпіричними*. Постає завдання за допомогою емпіричних таблиць знайти вид функції. Але значення y_i дістають у результаті експерименту, а вони, як правило, сумнівні, то в цьому разі задача інтерполювання табличної функції втрачає смисл. Тому шукають таку функцію $y = F(x)$, значення якої при $x = x_i$ досить близькі до табличних значень y_i, $i = 1,2,3,...,n$. Формулу $y = F(x)$ називають *емпіричною*. Її не виводять теоретично, і, як правило, не має особливого смислу в науковому розумінні. Формулу такої залежності надає дослідник. Але ці формули мають велике практичне значення, вдало підібрана емпірична формула дає змогу не тільки апроксимувати сукупність експериментальних даних, «згладжуючи» значення величини y, а й екстраполювати знайдену залежність на інші проміжки значень x.

Побудова емпіричної формули складається з двох етапів:

1) вибору виду функції $f(x)$;

2) визначення параметрів, які входять до виразу $f(x)$ так, щоб функція $f(x)$ найкраще відповідала нашим вимогам.

На першому етапі вигляд функції $f(x)$ вдається визначити з графіка, який побудований за експериментальними значеннями цієї функції. Зокрема може трапитися, що точки $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$, ..., $(x_n; y_n)$ розташовані майже на одній прямій. Із побудованого графіка вдається приблизно передбачити вид функції, порівнявши даний графік з графіком відомих кривих ліній (окремі неправильності при цьому не враховуються). Кількість параметрів підбирають так, щоб емпірична формула найкраще відображала результати спостережень і була досить простою. Для задач такого типу інтерполювання непридатне.

В інших випадках, не користуючись ескізами графіка, визначити вид функції можна з деяких додаткових міркувань. Зокрема, розглянемо функції $y = ax + b$, $y = ax^2 + bx + c$, тощо, та покажемо, як саме іншим способом (методом табличних різниць) можна визначити вид функції.

Побудова лінійної емпіричної формули. Як уже встановлено взаємна відповідність між всіма прямими, які не паралельні до осей координат, записується формулою $y = ax + b$, де $a \neq 0$ і $b \neq 0$. Знаючи формулу $y = ax + b$, можемо визначити значення функції, якщо задано значення аргументу. Отож, можемо скласти таблицю значень функції для багатьох значень аргументу. Ця таблиця буде мати такий вигляд:

Таблиця 2

x	x_0	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
y	$ax_0 + b$	$ax_1 + b$	$ax_2 + b$	...	$ax_{n-1} + b$	$ax_n + b$

Ми завжди будемо брати такі зростаючі значення аргументу x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n, щоб різниця між сусідніми значеннями аргументу була сталою. Цю величину будемо називати *кроком таблиці* і позначати її буквою h: $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = ... = x_n - x_{n-1}$. Такі таблиці носять назву *таблиць із сталим кроком*. При цій умові таблицю 2 можемо переписати так:

Введемо поняття табличної різниці.

Табличною різницею першого порядку Δy називається різниця між двома сусідніми табличними значеннями функції

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \,. \tag{1}$$

До таблиці 3 додамо рядок табличних різниць. Тоді вона матиме вигляд:

Як бачимо, в таблиці 4 з сталим кроком h лінійної функції $y = ax + b$ різниці першого порядку $\Delta y = ah$ завжди сталі. Більш того, за величиною табличної різниці Δy можна визначити її коефіцієнт a при аргументі лінійної функції, тобто $a = \frac{\Delta y}{h} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$. Але за цими даними не можна визначити вільний член b лінійної функції.

Із розглянутої таблиці 4 можна сформулювати важливе твердження.

Теорема 1. *Якщо функція із сталим зростаючим аргументом $h = x_{i+1} - x_i$ є лінійною, то таблична різниця першого порядку завжди є сталою $\Delta y = ah$.*

На другому етапі побудови емпіричної формули відбувається визначення параметрів лінійної функ-

Таблиця 3

x	x_0+h	x_0+2h	x_0+3h	...	$x_0+(n-1)h$	x_0+nh
y	ax_0+ah+b	$ax_0+2ah+b$	$ax_0+3ah+b$	...	$ax_0+(n-1)ah+b$	$ax_0+nah+b$

Таблиця 4

x	x_0+h	x_0+2h	x_0+3h	...	$x_0+(n-1)h$	x_0+nh
y	ax_0+ah+b	$ax_0+2ah+b$	$ax_0+3ah+b$	...	$ax_0+(n-1)ah+b$	$ax_0+nah+b$
Δy		ah	ah	...	ah	ah

ції. Щоб визначити параметри емпіричної формули часто застосовують метод найменших квадратів. Цей метод запропонували відомі математики К. Гаусс і А. Лежандр. Проте ми будемо користуватися досить простим *методом вибраних точок*.

З цією метою сформулюємо і доведемо обернене твердження до теореми 1.

Теорема 2. *Якщо табличні різниці першого порядку $\Delta y = ah$ у функції є сталими при сталому зростанні h аргументу, то така функція є лінійною.*

Відмітимо, що таблична різниця $\Delta y = ah$ є характерною властивістю лінійної функції $y = ax + b$. Доведемо цю теорему.

Нехай маємо деяку таблицю зі сталим кроком $h = x_{i+1} - x_i$ і сталою різницею першого порядку $\Delta y = y_{i+1} - y_i = ah$. Доведемо, що всі її значення належать деякій лінійній функції. Для цього виберемо довільні дві пари значень $(x_i; y_i)$ і $(x_{i+1}; y_{i+1})$.

Оскільки $x_{i+1} - x_i = h = \Delta x$, а $y_{i+1} - y_i = ah = \Delta y$, то $a = \frac{\Delta y}{h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$, де $i = 1,2,3,...,n-1$. Отже, a – стала величина.

Якщо a – стала величина, то залежність між x і y лінійна, бо точки $(x_i; y_i)$ належать одній прямій $y = ax + b$.

Щоб визначити вільний член b, достатньо, користуючись таблицею 3 та значенням параметра a, записати систему рівнянь

$$\begin{cases} ax_0 + b = y_0, \\ a = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \end{cases}$$

звідки

$$b = y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0 .$$

Слід відмітити, що якщо табличні різниці різні, але мають не великі відхилення, то використовують середнє їх значення за формулою

$$\overline{\Delta y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta y_i .$$

Розглянемо це на конкретному прикладі.

Задача 3. Щоб скласти річний план заводу економіст виробництва вирішив на одному з цехів заводу встановити залежність між стажем робітників і їх виготовленням кількості деталей, яка виражається наступним чином:

Таблиця 5

Стаж роботи (x років)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Виготовлена кількість деталей за зміну (y штук)	70	74	79	83	88	92	97	103	109	115
$\Delta y = y_i - y_{i-1}$		4	5	4	5	4	5	6	6	6

Чи можна, користуючись цією таблицею, скласти аналітичний вираз лінійної функції?

Розв'язання. Перевіримо задану в таблиці 5 залежність на лінійність. Оскільки $h = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = ...x_{10} - x_9 = 1$ і $\Delta y = \frac{1}{9}(4+5+4+5+4+$ $+5+6+6+6) = 5$, то залежність згідно з теоремою 2 між стажем роботи та кількістю виготовлених деталей є лінійною: $y = ax + b$.

Відповідь на запитання, поставлене в задачі, є однозначною. Для цього достатньо, скориставшись двома значеннями x і y з таблиці 5, скласти систему із двох рівнянь з невідомими a і b:

$$\begin{cases} 74 = 2a + b, \\ 79 = 3a + b; \end{cases}$$

звідки $a = 5$, $b = 64$. Отже, $y = 5x + 64$, де x належить до відрізка $[1;10]$.

Побудова квадратичної емпіричної формули. Розглянемо елементарну функцію, подану за допомогою аналітичної формули $y = ax^2 + bx + c$. Ми знаємо, що кожному значенню аргументу x відповідає єдине значення y, тобто вважаємо, що x і y пов'язані співвідношенням $y = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$. Ставиться завдання:

а) знайти вид функції; б) знайти параметри функції.

Складемо таблицю значень функції при сталому зростанні h аргументу x. Знайдемо табличну різницю Δy між двома сусідніми табличними значеннями функції $\Delta y = y_i - y_{i-1}$. Оскільки різниці Δy виявляються різними, то знайдемо другу табличну різницю $\Delta^2 y$ між двома сусідніми табличними значеннями першої різниці $\Delta^2 y = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$.

Розглянемо метод табличних різниць квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$.

Як бачимо з таблиці 6, перша таблична різниця Δy залежить від їх номера n і від аргументу x; вони різні. Друга різниця $\Delta^2 y$ не залежить від номера n і від аргументу x, тобто є сталою для всієї таблиці 6:

$$\Delta^2 y = 2ah^2 . \quad (2)$$

Ця різниця $\Delta^2 y$ називається *різницею другого порядку*. Отже, ми довели наступну теорему.

Теорема 3. *Будь-яка квадратична функція зі сталим кроком h (приростом аргументу x) завжди має сталу різницю другого порядку $\Delta^2 y$.*

Правильною буде й обернена теорема.

Теорема 4. *Якщо функція зі сталим кроком h (приростом аргументу x) має сталу різницю другого порядку $\Delta^2 y$, то всі її значення належать деякій квадратичній функції.*

Доведення теореми 4 виконаємо наступним чином.

Нехай задана таблиця 6 зі сталим кроком h має сталу різницю другого порядку $\Delta^2 y$. Користуючись першими трьома вузлами $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$ і $(x_2; y_2)$ складемо аналітичний вираз функції

Таблиця 6

x	$y = ax^2 + bx + c$	Δy	$\Delta^2 y$
x_0	$y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$		
$x_0 + h$	$y_1 = a(x_0 + h)^2 + b(x_0 + h) + c$	$2ahx_0 + ah^2 + bh$	
$x_0 + 2h$	$y_2 = a(x_0 + 2h)^2 + b(x_0 + 2h) + c$	$2ahx_0 + 3ah^2 + bh$	$2ah^2$
$x_0 + 3h$	$y_3 = a(x_0 + 3h)^2 + b(x_0 + 3h) + c$	$2ahx_0 + 5ah^2 + bh$	$2ah^2$
…	…	…	…
$x_n - h$	$y_{n-1} = a(x_n - h)^2 + b(x_n - h) + c$	$2ahx_n - 3ah^2 + bh$	$2ah^2$
x_n	$y_n = ax_n^2 + bx_n + c$	$2ahx_n - ah^2 + bh$	$2ah^2$

$y = ax^2 + bx + c$. Далі складемо таблицю значень цієї функції з тими самими значеннями аргументу, що й в заданій таблиці 6. Перші три вузли нової таблиці будуть збігатися з першими трьома вузлами вихідної таблиці. Різниця другого порядку $\Delta^2 y$ буде в обох таблицях однакова. Встановлюючи за цими даними значення y другої таблиці, ми лише відтворимо задану таблицю.

Щоб визначити параметри a , b і c цієї квадратичної функції, потрібно методом вибраних точок скласти систему трьох рівнянь з цими невідомими і розв'язати її. Вибравши три пари значень $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$ і $(x_2; y_2)$, складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c = y_0, \\ ax_1^2 + bx_1 + c = y_1, \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2. \end{cases} \tag{3}$$

Оскільки складена таблиця квадратичної функції зі сталим кроком h має сталу різницю другого порядку $\Delta^2 y = 2ah^2$, то можна визначити параметр a .

В таблиці 6 маємо $\Delta^2 y = 2ah^2$, звідки

$$a = \frac{\Delta^2 y}{2h^2}. \tag{4}$$

Підставивши в систему рівнянь (3) перших двох рівнянь замість a вираз $\frac{\Delta^2 y}{2h^2}$, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\Delta^2 y}{2h^2} x_0^2 + bx_0 + c = y_0, \\ \frac{\Delta^2 y}{2h^2} x_1^2 + bx_1 + c = y_1. \end{cases} \tag{5}$$

Друге рівняння системи (5) помножимо на (–1) і додамо до нього перше рівняння, дістанемо

$$\frac{\Delta^2 y}{2h^2}(x_0^2 - x_1^2) + b(x_0 - x_1) = y_0 - y_1 .$$

Врахувавши те, що $\Delta y = y_1 - y_0$, $h = x_1 - x_0$, і спростивши це рівняння, дістанемо:

$$b = \frac{2h\Delta y - \Delta^2 y(x_0 + x_1)}{2h^2}. \tag{6}$$

Із першого рівняння системи (5) дістанемо

$$c = y_0 - \frac{\Delta^2 y x_0^2 - 2h\Delta y x_0 + \Delta^2 y(x_0 + x_1)x_0}{2h^2}. \tag{7}$$

Знаменники виразів (4), (6) і (7) для параметрів a , b , і c не дорівнюють нулю. Отже, параметри a , b , і c системи рівнянь (3) визначаються однозначно.

Серед транспортних задач, найраціональніші з економічного погляду, важливе місце займають задачі, в яких йде мова про найраціональніші способи шляхів сполучення об'єктів. Елементарним прикладом може бути наступна задача.

Задача 4. Яка максимальна кількість шляхів сполучення може бути між об'єктами, які розміщені у вершинах опуклого n -кутника?

Розв'язування. Проведемо серію уявних «експериментів».

Спостереження: а) три об'єкти сполучені 3-ма шляхами; б) чотири об'єкти сполучені 6-ма шляхами. в) п'ять об'єктів сполучені 10-ма шляхами; г) шість об'єктів сполучені 15-ма шляхами; д) сім об'єктів сполучені 21-им шляхом.

Щоб в загальному дати відповідь на запитання, яке поставлене в задачі, може допомогти метод табличних різниць. Складемо таблицю.

Таблиця 7

Кількість об'єктів (n)		**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Кількість шляхів сполучення (k)		3	6	10	15	21
Табличні різниці	Δk		3	4	5	6
	$\Delta^2 k$			1	1	1

Як бачимо, різниця другого порядку $\Delta^2 k = 1$ – стала величина. Отже, формула, яка визначає максимальну кількість шляхів сполучення об'єктів згідно з теоремою 4 виражається формулою $k(n) = an^2 + bn + c$.

Залишається, методом вибраних точок, визначити значення параметрів a , b , і c . Користуючись числами розміщених у таблиці 7, запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 16a + 4b + c = 6, \\ 25a + 5b + c = 10, \\ 36a + 6b + c = 15. \end{cases} \tag{8}$$

Розв'язуючи цю систему, дістанемо: $a = 0,5$, $b = -0,5$ і $c = 0$. Отже,

$$k(n) = \frac{n^2 - n}{2}. \tag{9}$$

Формула (9) є правильною для описаних «експериментів». Для того, щоб вона була правильною для довільного натурального числа n , залишається підтвердити її правильність методом математичної індукції.

Для $n = 3$, 4, 5, 6 і 7 формула (9) є правильною. Нехай вона буде правильною для $n = m$ об'єктів, тобто $k(m) = am^2 + bm + c$. Доведемо, що ця формула буде правильною при $n = m + 1$. Тоді кількість шляхів, які сполучають об'єкти, збільшується на число m. Тобто

$$k(m+1)=k(m)+m=\frac{m^2-m}{2}+m=\frac{(m+1)^2-(m+1)}{2}.$$

Отже, формула (9) є правильною для всіх натуральних чисел, які вказують на кількість шляхів сполучення n об'єктів.

Ряд задач економіки зводиться до знаходження найвигідніших, або, як кажуть, оптимального варіанту планування виробничих процесів. Наведемо елементарний приклад, пов'язаний з торгівлею, такої задачі.

Задача 5. Для визначення попиту на чоловіче взуття в одному із магазинів на прохання виробника взуттєвої фабрики, провели спостереження протягом тижня за проданим взуттям, результати якого подані в таблиці.

Таблиця 8

Розмір взуття (n)	**38**	**39**	**40**	**41**	**42**	**43**	**44**
Кількість проданого взуття (k)	2	12	18	20	18	12	2

Встановіть залежність між розмірами взуття і кількістю проданого взуття. Скільки взуття кожного розміру треба виготовити для 20 000 населення?

Для визначення залежності між змінними n і k побудуємо таблицю табличних різниць.

Таблиця 9

n	**38**	**39**	**40**	**41**	**42**	**43**	**44**
k	2	12	18	20	18	12	2
Δk		10	6	2	−2	−6	−10
$\Delta^2 k$			−4	−4	−4	−4	−4

Оскільки $h=1$ – стале число і різниця другого порядку ($\Delta^2 k=-4$) також є сталим числом, то згідно з теоремою 4, залежність між n і k виражається квадратичною функцією:

$$k(n)=an^2+bn+c.$$

З метою визначення значення параметрів a, b, і c потрібно методом вибраних точок скласти і розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases}1444a+38b+c=2,\\ 1521a+39b+c=12,\\ 1600+40b+c=18.\end{cases} \tag{10}$$

В результаті розв'язування системи рівнянь (10) знаходимо значення параметрів: $a=-2$, $b=164$, $c=-3342$. Рівняння зв'язку між номером взуття та кількістю проданого взуття кожного розміру набуває вигляду:

$$k(n)=-2n^2+164n-3342,$$

$$\text{або } k(n)=20-2(n-41)^2,\ 38\le n\le 44. \tag{11}$$

Кількість взуття кожного розміру для 20000 жителів визначається формулою

$$\tilde{k}(n)=\frac{20-2(n-41)^2}{84}\cdot 20000.$$

Отже, формула (11) є правильною для всіх описаних «експериментів».

Розглянемо ще дві наступні взаємопов'язані між собою задачі. Задача 7 є продовженням задачі 6.

Задача 6. Визначте, на яку максимальну кількість різнокольорових частин k можна розподілити площину n прямими.

Розв'язування. Доведемо, що k буде найбільшим, якщо ніякі дві прямі не будуть паралельними й ніякі три прямі не будуть перетинатися в одній точці.

Проведемо серію уявних «експериментів».

Спостереження: а) одна пряма ділить площину на 2 частини; б) дві прямі ділять площину на 4 частини; в) три прямі ділять площину на 7 частин; г) чотири прямі ділять площину на 11 частин.

Щоб в загальному дати відповідь на запитання, яке поставлено в задачі, може допомогти метод табличних різниць. Складемо таблицю.

Таблиця 10

Кількість прямих (n)	**1**	**2**	**3**	**4**
Кількість частин (k)	2	4	7	11
Δk		2	3	4
$\Delta^2 k$			1	1

Як бачимо, різниця другого порядку $\Delta^2 k$ стала величина Отже, формула, яка визначає максимальну кількість різнокольорових частин площини, розділених n прямими, виражається квадратичною функцією:

$$P_2(n)=an^2+bn+c.$$

Залишається, методом вибраних точок, визначити значення параметрів a, b, і c. Користуючись числами таблиці 10, запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}a+b+c=2,\\ 4a+2b+c=4,\\ 9a+3b+c=7.\end{cases} \tag{12}$$

Розв'язуючи систему (12), дістанемо $a=0{,}5$, $b=0{,}5$, $c=1$.

Отже, формула $P_2(n)=an^2+bn+c$ матиме вигляд

$$P_2(n)=\frac{n^2+n+2}{2}. \tag{13}$$

Формула (13) є правильною для описаних «експериментів». Для того, щоб ця формула була правильною для довільного натурального числа, потрібно підтвердити її правильність методом математичної індукції.

Для $n=1$, 2, 3, 4 формула є правильною. Нехай вона буде правильною для $n=m$ прямих, із яких ніякі дві прямі не паралельні й ніякі три не перетинаються в одній точці. Проведемо ще одну $(m+1)$-шу пряму. Вона перетне m прямих в m різних точках і ці точки розділять її на $m+1$ частин ($m-1$ відрізків і два промені). Кожна така частина ділить існуючу частину площини на дві частини, тобто до існуючих частин площини додається ще $m+1$ частин площини. Тому

$$P_2(m+1)=P_2(m)+(m+1)=\frac{m^2+m+2}{2}+m+1=\frac{(m+1)^2+(m+1)+2}{2}.$$

Отже, формула (13) є правильною для довільного натурального числа n.

Як бачимо, метод табличних різниць допоміг виконати досить важливу частину роботи – побудувати гіпотезу, і методом математичної індукції підтвердити її правильність, як формулу для натурального числа.

Вище було розглянуто методику побудови емпіричних функцій економічного змісту (виробничих, транспортних торговельних), в яких економічною моделлю були емпіричні лінійні та квадратичні функції. Узагальнимо цю методику на прикладі задачі, моделлю якої буде емпірична функція третього степеня.

Задача 7. На яку максимальну кількість k частин можна розділити простір n площинами.

Можна сказати, що така задача не має практичного значення. Може й так, але часто математична задача деякий час досить далека від практики, а тільки в певний момент виявиться її велике практичне значення. Може і ця задача знайде практичне застосування.

Розв'язування. Кількість k частин простору буде найбільшим, якщо ніякі дві площини не будуть паралельними і ніякі три площини не будуть перетинатися по одній прямій.

Спостереження: а) одна площина ділить простір на дві частини; б) дві площини ділять простір на чотири частини; в) три площини ділять простір на вісім частин; г) чотири площини ділять простір на 15 частин.

Складемо таблицю.

Таблиця 11

n	**1**	**2**	**3**	**4**
k	2	4	8	15
Δk		2	4	7
$\Delta^2 k$			2	3
$\Delta^3 k$				1

Скільки Δk і $\Delta^2 k$ не є сталими числами, а для того щоб визначити сталість $\Delta^3 k$, необхідно знайти, скільки буде частин простору при $n=5$. А це досить важко визначити, тому замість $n=5$ візьмемо значення $n=0$.

Складемо додаткову таблицю.

Таблиця 12

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
k	1	2	4	8	15
Δk		1	2	4	7
$\Delta^2 k$			1	2	3
$\Delta^3 k$				1	1

Оскільки $\Delta^3 k = 1$ – стале число, то можна припустити, що

$$k = P_3(n) = an^3 + bn^2 + cn + d\ .$$

Визначимо, методом вибраних точок, коефіцієнти цього многочлена. Тому нам прийдеться розв'язати систему чотирьох рівнянь з 4-ма невідомими. Складемо систему рівнянь, використовуючи перші 4 вузли таблиці 12.

$$\begin{cases} a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d = 1, \\ a+b+c+d=2, \\ 8a+4b+2c+d=4, \\ 27a+9b+3c+d=8. \end{cases} \quad (14)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (14), дістанемо $a=\frac{1}{6}$, $b=0$, $c=\frac{5}{6}$, $d=1$. Отже,

$$P_3(n) = \frac{n^3+5n+6}{6} \quad \textbf{(15)}$$

Далі залишається довести правильність формули (15) для довільного натурального числа n методом математичної індукції.

Для $n=0$, 1, 2, 3, 4 формула (15) є правильною. Нехай формула (15) є правильною для $n=m$, тобто $P_3(m)=\frac{m^3+5m+6}{6}$. Проведемо $(m+1)$-шу площину. Вона перетне всі раніше проведені площини по m різних прямих (оскільки ніякі дві площини не паралельні і ніякі три площини не проходять через одну пряму). Але із задачі 6 випливає, що m прямих ділять площину на $\frac{m^2+m+2}{2}$ частин. Отже, наша площина поділиться цими прямими саме на таку кількість частин. Кожна з цих частин є «перегородкою», яка відділяє нову частину простору. Проводячи $(m+1)$-шу площину, ми додаємо до тих, що раніше були, $\frac{m^2+m+2}{2}$ нових частин простору. Всього одержуємо частин:

$$P_3(m+1) = P_3(m) + \frac{m^2+m+2}{2} = \frac{m^3+5m+6}{6} + \\ + \frac{m^2+m+2}{2} = \frac{(m+1)^3+5(m+1)+6}{6}. \quad \textbf{(16)}$$

Отже, формула (15) є правильною для довільного натурального числа n.

Точно так само можна розв'язувати задачу, математична модель якої має сталі табличні різниці $\Delta^4 y$, $\Delta^5 y$ і т. д.

Згідно з означенням, маємо $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$. Для різниць другого порядку

$$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = (y_{k+2} - y_{k+1}) - (y_{k+1} - y_k) = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k\ .$$

Як бачимо, різниця третього порядку має вигляд

$$\Delta^3 y_k = \Delta^2 y_{k+1} - \Delta^2 y_k = (y_{k+3} - 2y_{k+2} + y_{k+1}) - \\ -(y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k) = y_{k+3} - 3y_{k+2} + 3y_{k+1} - y_k.$$

Методом математичної індукції можна довести, що

$$\Delta^n y_k = y_{k+n} - ny_{k+n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} y_{k+n-2} - \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} y_{k+n-3} + \ldots + (-1)^n y_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i y_{n+k-i}.$$

У цьому разі справедливе таке твердження: *якщо різниці n-го порядку функції $y=f(x)$ є сталими для будь-якого сталого кроку, то ця функція є многочленом n-го порядку.*

Висновки. Сформульовані і доведені в роботі теореми, на основі яких будуються емпіричні функції для економічних задач, що статистично описують різні економічні процеси, доцільно застосовувати для вирішення оптимального планування виробничих процесів. Запропоновані методи розв'язування логістичних задач, забезпечують побудову оптимальних економічних планів виробничого, торговельного та транспортного характеру. Тому доцільно використовувати лінійні, квадратичні та інших степенів функції в якості математичної моделі виробничого процесу, а їх застосування забезпечить можливість моделювання виробничих процесів.

Список використаних джерел:

1. Андріїшин М.В., Шулейкін С.Д. Економічна ефективність використання землі. Київ, 1969. 168 с.
2. Возняк Г.М., Гусев В.А. Прикладные задачи на экстремумы. Москва, 1985. 144 с.
3. Лященко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи. Київ, 1996. 280 с.
4. Жалдак М.І., Рамський Ю.С. Чисельні методи математики. Київ, 1984. 208 с.

References:

1. Andrijishyn M.V., Shulejkin S.D. (1969). *Ekonomichna efektyvnistj vykorystannja zemli* [Economic efficiency of land use]. Kyjiv: Urozhaj. (in Ukrainian)
2. Voznyak G.M., Gusev V.A. (1985). *Prikladnye zadachi na ekstremumy* [Applied problems for extrema]. Moskva: Prosveshchenie. (in Russian)
3. Ljashhenko M.Ja., Gholovanj M.S. (1996). *Chyseljni metody* [Numerical methods]. Kyjiv: Lebidj. (in Ukrainian)
4. Zhaldak M.I., Ramsjkyj Ju.S. (1984). *Chyseljni metody matematyky* [Numerical methods of mathematics]. Kyjiv: Radjansjka shkola. (in Ukrainian)

Vozniak Olha
West Ukrainian National University
Holubnyk Olha
Ivan Franko National University of Lviv

CONSTRUCTION OF ECONOMIC EMPIRICAL FORMULAS BY TABLE DIFFERENCE METHOD

Summary
The article analyzes the role of mathematical research of economic phenomena and processes. The evolution of scientific research in the field of mathematical economics is considered. It is established that despite the great scientific contribution to the problems of construction and methods of solving economic problems that contain empirical formulas of economic situations, this area requires further research and mathematical description of new economic situations. In the process of studying various issues of science, economics, technology, sociology, pedagogy, it is necessary on the basis of a large amount of research data to identify significant factors that affect the object under study, as well as to establish a form of relationship between different related quantities. When solving such applied problems, there is often a situation when the analytical type of functions, which determines the functional dependence, is unknown, but this function is set tabularly or graphically. The task is to use empirical tables to find the type of function. These formulas are of great practical importance, a well-chosen empirical formula allows not only to approximate the set of experimental data, "smoothing" the value of the value, but also to extrapolate the dependence to other ranges of values. The method of construction of economic empirical formulas by the method of tabular differences is offered. Theorems for construction of empirical functions are formulated: $y = ax + b$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Optimal plans of production processes are constructed with the use of the considered theorems. The method of selected points for determining the parameters of the economic model that describes the production process is proposed. The theorems formulated and proved in the work, on the basis of which empirical functions for economic problems are built, which statistically describe various economic processes, should be used to solve the optimal planning of production processes. The proposed methods of solving logistics problems, ensure the construction of optimal economic plans for production, trade and transport.
Keywords: empirical formulas, economic model, empirical tables, first order difference Δy, second order difference $\Delta^2 y$, n th order difference $\Delta^n y$, tabular difference method, selected point method, quadratic empirical function, finite difference.