РОЗДІЛ 10
МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 330.42-330.46

Чорнорот Я. О.
Національна металургійна академія України

ПОБУДОВА МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ, ЩО ВРАХОВУЄ ЗНИЖКИ, З ВИКОРИСТАННЯМ ТЕОРІЇ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

Управління запасами є важливою ланкою для успішної діяльності багатьох підприємств, а розробка економіко-математичних моделей із застосуванням теорії комплексних змінних є перспективним напрямом для розширення та вдосконалення математичних моделей в економіці. Теорія комплексних чисел може бути застосована в багатьох розділах економіко-математичного моделювання. У статті розроблена та проаналізована модель управління запасами, що враховує знижки, з використанням теорії комплексних чисел.
Ключові слова: теорія комплексних чисел, економіко-математична модель, управління запасами, знижки, обсяг замовлення, витрати.

Постановка проблеми. В економіці широко використовуються математичні методи і моделі, що дають змогу прискорити проведення економічного аналізу, підвищують точність обчислень, найбільш повно враховують вплив факторів на результати діяльності підприємства. Побудова економіко-математичних моделей є важливою складовою для успішної діяльності підприємства. Моделі управління запасами є важливою складовою управлінської діяльності для успішного існування будь-якого підприємства, що у своїй роботі стикається з наявністю запасів. Їх використання дає можливість підприємству максимізувати свій дохід за рахунок оптимізації рівня запасів та ефективного їх використання. Серед наявних розроблених моделей управління запасами, в яких застосовано різноманітні математичні методи, теорію комплексних чисел ще не було застосовано.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Ефективне управління запасами дає змогу організації задовольнити очікування споживачів, створюючи такі запаси кожного товару, які максимізують чистий прибуток. При управлінні запасами вирішується два основних питання: це обсяг і термін заказу, тобто у якій кількості та коли треба здійснювати заказ необхідного товару.

Багато науковців у своїх працях приділили свою увагу проблемі управління запасами, а саме Т.В. Алесинська, Е.Н. Ломкова, А.А. Епов, Н.В. Новікова, Л.А. Делюкін, М.І. Баканов, В.В. Федосєєва, Б.К. Плоткін, М.В. Мельник, А.Д. Шеремет, О.В. Ефімова, А.М. Стерлігова та ін. Перспективним напрямом є побудова моделей управління запасами із застосуванням теорії комплексних змінних.

Економіко-математичне моделювання з використанням теорії комплексних чисел є відносно новим та досить перспективним напрямом у сучасній науці. Дослідженнями у цій сфері займаються такі вчені, як С.Г. Светуньков, Г.В. Савинов, І.С. Светуньков, Т.В. Блудова, О.О. Мельник, Т.В. Корецька, А.А. Богданов, А.В. Заграновська, І.Ю. Шарипова та ін.

Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми. Проведений аналіз літературних джерел за темою дослідження показав, що серед розроблених моделей управління запасами із застосуванням різноманітних математичних методів, на цей час невирішеним залишається питання побудови моделей управління запасами з використанням теорії комплексних змінних.

Мета статті. Головною метою роботи є розробка моделі управління запасами зі знижками із застосуванням теорії комплексних чисел, та аналіз отриманих результатів.

Виклад основного матеріалу. Для ведення бізнесу в силу різних причин необхідно мати запаси. Найбільш загальною причиною є необхідність своєчасного постійного задоволення щоденних заявок покупців і, отже, потреб виробництва. Управління запасами в бізнесі будь-якого масштабу вимагає наявності чіткої системи обліку їх руху, повинні використовуватися певні процедури. Брак знань і умінь малого бізнесу в галузі фінансового менеджменту часто унеможливлює ефективне управління запасами. Власники малого бізнесу не завжди розуміють, що існують додаткові витрати, пов'язані з підтриманням як занадто великих запасів, так і із занадто низьким рівнем запасів [1, с. 399].

Управління запасами полягає у встановленні моментів і обсягів замовлення на їх заповнення і розподілі новоприбулою партії по ланках системи постачання [2, с. 20].

Модель управління запасами, що враховує знижки - це модель оптимального економічного розміру замовлення, який забезпечує мінімальну величину сумарних витрат та отримати більш вигідну партію товару, отримавши знижку. Наведемо формули цієї моделі.

Рівняння загальних витрат для ситуації, коли враховуються витрати на покупку товару, має вигляд:

$$L = K\frac{\nu}{Q} + s\frac{Q}{2} + c\nu, \tag{1}$$

де L – загальні витрати на управління запасами в одиницю часу;

Q – розмір замовлення;

ν – інтенсивність споживання запасу;

s – витрати на зберігання запасу;

K – витрати на здійснення замовлення.

c – ціна товару;

$c\nu$ – витрати на купівлю товару в одиницю часу.

Якщо на замовлення великого обсягу надаються знижки, то замовлення на більші партії спричинять за собою збільшення витрат на зберігання, але це збільшення може бути компенсоване зниженням закупівельної ціни. Таким чином, оптимальний розмір замовлення може змінюватися в порівнянні з ситуацією відсутності знижок. Тому витрати на придбання товару необхідно враховувати в моделі покупок зі знижками [3, с. 142].

Нові вхідні параметри моделі, що враховує знижки:

1) Qp1, Qp2 – точки розриву цін, тобто розміри покупок, при яких починають діяти відповідно перша і друга знижки;

2) c, c1, c2 – відповідно, вихідна ціна, ціна з першою знижкою, ціна з другої знижкою.

Щоб визначити оптимальний розмір замовлення Q*, необхідно проаналізувати, в яку з трьох областей потрапляє точка розриву ціни. Правило вибору Q* для випадку з однією знижкою має вигляд [3, с. 143]:

$$Q^{*}=\begin{cases}\text{Qw, якщо } 0 \le \text{Qp1} < \text{Qw (область 1)},\\ \text{Qp1, якщо Qw} \le \text{Qp1} < \text{Q1 (область 2)},\\ \text{Qw, якщо Qp1} \ge \text{Q1 (область 3)}.\end{cases} \quad (2)$$

Аналогічно до базової моделі [4, с. 164-166], витрати на закупку та витрати на зберігання представимо у вигляді комплексної змінної b_0+ib_1. Тоді функція загальних витрат на управління запасами в загальному вигляді буде виглядати так:

$$L = f\,(b_0 + ib_1), \quad (3)$$

де $$b_0 = K\frac{V}{Q} + Cv = \frac{Kv + CvQ}{Q}, \quad (4)$$

$$b_1 = s\frac{Q}{2} \text{ – витрати на зберігання.} \quad (5)$$

Тут L, b_0 і b_1 – позитивні дійсні числа. Віднесення b_0 в дійсну частину, а b_1 – в уявну умовне і не грає принципового значення. У такій функції комплексному числу зіставляється дійсне число L.

Пов'яжемо витрати на закупку та зберігання таким чином:

$$L=(a_0+ia_1)(b_0+ib_1), \quad (6)$$

Тут a_0 і a_1 є дійсними числами. Перший співмножник, що являє собою комплексне число (a_0+ia_1), допомагає зв'язати в одній моделі витрати і результати, але вимагає самостійного наукового дослідження.

Аналогічно до найпростішої моделі, здійснивши перемноження співмножників в правій частині рівності (6) і групуючи дійсну та уявну частини, отримаємо:

$$L=(a_0b_0+a_1b_1)+i(a_0b_1\text{-}a_1b_0). \quad (7)$$

Як наслідок, маємо комплексне число, дійсна частина якого $(a_0b_0+a_1b_1)$ дорівнює L, а уявна частина$(a_0b_1\text{-}a_1b_0)$ повинна дорівнювати нулю в силу того, що в лівій частині рівності уявної частини немає, тобто вона представлена перемноженням i0. Отже, функція (6) є адитивною моделлю виду:

$$\text{L}= a_0b_0+a_1b_1. \quad (8)$$

Тут коефіцієнти a_0 і a_1 являють собою частини одного комплексного числа. Ця обставина зумовлює особливість властивостей запропонованої моделі. Використовувати модель (8) у даному випадку не можна, оскільки має виконуватися умова:

$$a_0b_1\text{-}a_1b_0=0. \quad (9)$$

Таким чином, рішення системи рівнянь (8) - (9) дає змогу знайти значення коефіцієнтів a_0, a_1.

Ці значення також можна отримати і використовуючи безпосередньо модель (6). Для цього визначимо комплексне число коефіцієнтів через витрати, зробивши кілька елементарних перетворень:

$$a_0 - ia_1 = \frac{L}{b_0 + ib_1} = \frac{L(b_0 - ib_1)}{b_0^2 + b_1^2}. \quad (10)$$

Ця рівність (10) виконується тільки в тому випадку, якщо рівні попарно дійсні та уявні частини комплексних чисел у його лівій і правій частинах. Після розкриття дужок і групування окремо речової та уявної частини отримаємо формули для обчислення кожного з коефіцієнтів:

$$a_0 = \frac{Lb_0}{b_0^2 + b_1^2}. \quad (11)$$

$$a_1 = \frac{Lb_1}{b_0^2 + b_1^2}. \quad (12)$$

Ці формули дають змогу знайти чисельні значення коефіцієнтів по відомим значенням витрат, а також дати економічну інтерпретацію значень кожного з коефіцієнтів a_0 та a_1.

$$a_0 = \frac{\frac{L(Kv + CvQ)}{Q}}{\frac{(Kv + CvQ)^2}{Q^2} + s^2\frac{Q^2}{4}} = \frac{\frac{LKv + LCvQ}{Q}}{\frac{K^2v^2 + 2KCv^2Q + C^2v^2Q^2}{Q^2} + \frac{S^2Q^2}{4}} =$$

$$= \frac{(LKv + LCvQ)4Q}{4K^2v^2 + 8KCv^2Q + 4C^2v^2Q^2 + S^2Q^4} = \frac{4LKvQ + 4LCvQ^2}{(2Kv + 2CvQ)^2 + S^2Q^4}$$

$$a_1 = \frac{L\frac{SQ}{2}}{\frac{K^2v^2 + 2KCv^2Q + C^2v^2Q^2}{Q^2} + \frac{S^2Q^2}{4}} =$$

$$= \frac{LSQ}{2} * \frac{4Q^2}{4K^2v^2 + 8KCv^2Q + 4C^2v^2Q^2 + S^2Q^4} = \frac{2LSQ^3}{(2Kv + 2Cv)^2 + S^2Q^4}$$

Коефіцієнти a_0 та a_1 будуть рівні, якщо:

$$\frac{4LKvQ+4LCvQ^2}{(2Kv+2CvQ)^2+S^2Q^4} = \frac{2LSQ^3}{(2Kv+2Cv)^2+S^2Q^4} <=>$$

$$(2Kv + 2Cv)^2 + S^2Q^4 \neq 0$$

$$(2Kv + 2Cv)^2 + S^2Q^4 > 0$$

$$4LKvQ + 4LCvQ^2 = 2LsQ^3 <=>$$

$$2Kv + 2CvQ = SQ^2$$

$$SQ^2 - 2CvQ - 2Kv = 0$$

$$D = (2Cv)^2 + 4S * 2Kv = 4C^2v^2 + 8SKv$$

$$Q = \frac{2Cv + \sqrt{4C^2v^2 + 8SKv}}{2S} = \frac{2Cv + \sqrt{4(C^2v^2 + 2SKv)}}{2S} =$$

$$= \frac{2Cv + 2\sqrt{C^2v^2 + 2SKv}}{2S} = \frac{Cv + \sqrt{C^2v^2 + 2SKv}}{S}$$

Згідно виразів (11-12), коефіцієнт a_1 відображає зміну витрат на закупку запасів, а коефіцієнт a_0 відображає зміну витрат на зберігання запасів. Таким чином, ці коефіцієнти можна назвати коефіцієнтами витрат на закупку та зберігання відповідно.

Далі проаналізуємо можливі межі зміни даних коефіцієнтів залежно від зміни витрат або на поставку або на їх зберігання, тобто:

$$a_0 = f(\frac{Kv}{Q})$$

$$a_1 = f(\frac{sQ}{2})$$

Як і у базовій моделі, значення коефіцієнтів a_0 та a_1 мають різну поведінку. Коефіцієнт a_0 при прагненні обсягу заказу Q до нуля сам прагне до нуля, а коефіцієнт a_1 при прагненні параметра Q до нескінченності – прагне до одиниці:

$$\lim_{Q \to 0} \mathrm{a}_0 = 0$$

$$\lim_{Q \to 0} \mathrm{a}_0 = 0$$

Тому з урахуванням несиметричності поведінки коефіцієнтів їх варто розглядати окремо.

Проведемо аналіз значень коефіцієнтів витрат на зберігання та закупку та дослідимо значення Q, коли $a_0 = a_1$. Для цього розглянемо задачі з управління запасами, що враховують знижки, та побудуємо графіки.

Умови задачі, взяті з джерела [5, с. 33]: інтенсивність споживання запасу v = 1000 шт. на рік, витрати на здійснення замовлення K = 10 грн, витрати на зберігання запасу s = 4 грн/шт. рік, ціна одиниці товару c = 5 грн/шт., якщо обсяг заказу не менш, ніж 500 одиниць, то діє знижка і ціна буде c = 4 грн/шт. Розраховане значення оптимального розміру заказу приблизно дорівнює $Q^* \approx 71$ штук.

Побудуємо для цієї задачі графік витрат на управління запасами з урахуванням знижок (рис. 1) та графік зміни значень коефіцієнтів a_0 та a_1 (рис. 2).

Проаналізувавши графік зміни значень коефіцієнтів a_0 та a_1, можна зробити висновок, що криві коефіцієнтів a_0 та a_1 ведуть себе різноспрямовано, подібно до найпростішої моделі [4, с. 164-166].

Дослідимо та проаналізуємо значення Q, коли $a_0 = a_1$. Як можна побачити графічно з рисунка 2 або розрахувавши значення Q за формулою Q**, отримали значення 2003 шт., що є набагато більше розрахованого значення обсягу заказу за формулою Уілсона, яке дорівнює 71 шт. та обраного у задачі за правилом (**) оптимального розміру замовлення, що рівне точці розриву ціни Qp1 = 500шт. Але при виборі значення Q**, як оптимального розміру заказу, можна отримати наступні переваги. Для цього порівняємо розраховані показники, отримані при застосуванні класичної моделі управління запасами, що враховує знижки та цієї ж моделі, розробленої з використанням теорії комплексних чисел.

У задачі за правилом обрано значення Qp1 = 500 шт., при якому значення сукупних витрат L = 5020 у.о.; при заданому значенні інтенсивності споживання запасу v = 1000 одиниць на

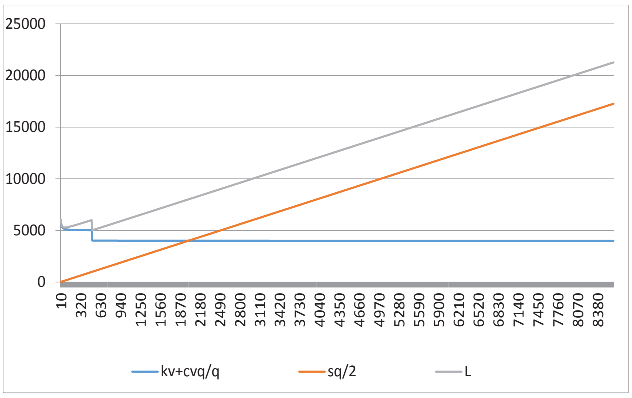

Рис. 1. Графік витрат на управління запасами з урахуванням знижок

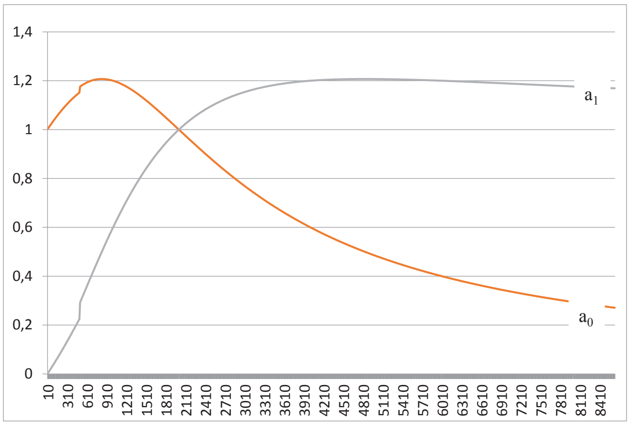

Рис. 2. Графік зміни значень коефіцієнтів a_0 та a_1

Таблиця 1

Значення Q при різних v

V	Q*	Q1	Вибір за правилом	Q**	L*	L**	L (Qp1)
100	22,36068	88,875	Q*	251,9843	589,4427	1007,937	-
200	31,62278	156,5	Q*	501,9921	1126,491	2007,968	-
300	38,72983	220,75	Q*	602,4897	1654,919	2409,959	-
400	44,72136	285	Q*	802,4922	2178,885	3209,969	-
500	50	342,75	Q*	1002,494	2700	4009,975	-
600	54,77226	402	Q*	1202,495	3219,089	4809,979	-
700	59,1608	460,5	Q*	1402,496	3736,643	5609,982	-
800	63,24555	518,75	Qp1	1602,496	4252,982	6409,984	4216
900	67,08204	576,25	Qp1	1802,497	4768,328	7209,986	4618
1000	70,71068	633,5	Qp1	2002,497	5282,843	8009,988	5020
1100	74,16198	690,5	Qp1	2202,497	5796,648	8809,989	5422
1200	77,45967	747	Qp1	2402,497	6309,839	9609,99	5824
1300	80,62258	803,5	Qp1	2602,498	6822,49	10409,99	6226
1400	83,666	859	Qp1	2802,498	7334,664	11209,99	6628
1500	86,60254	917,75	Qp1	3002,498	7846,41	12009,99	7030
1600	89,44272	970,75	Qp1	3202,498	8357,771	12809,99	7432
1700	92,19544	1026,25	Qp1	3402,498	8868,782	13609,99	7834
1800	94,86833	1081,75	Qp1	3602,498	9379,473	14409,99	8236
1900	97,46794	1187	Qp1	3802,498	9889,872	15209,99	8638
2000	100	1199,25	Qp1	4002,498	10400	16009,99	9040

рік, таких заказів потрібно зробити 2 на рік. Тобто витрати на один рік будуть дорівнювати:

L* = 5020 * 2 = 10040 у.о.

Якщо застосовувати розроблену модель, то вибір розміру партії Q**=2003 од., при цьому витрати будуть дорівнювати L = 8010 у.о. Цього запасу вистачить на 2 роки при v = 1000 од./рік. Значення сукупних витрат на один рік у даному випадку буде дорівнювати:

L** = 8010 / 2 = 4005 у.о.

Таким чином, при замовленні Q** менше ніж за рік інвестиції будуть оправдані, так як витрати майже в 2,5 рази меншими у розрахунку на один рік.

Проведемо дослідження значень показника Q при різних значеннях показника інтенсивності споживання запасу v, тобто розглянемо випадки, якщо попит буде рости або падати. Отримані значення занесемо у таблицю 1.

Проаналізувавши отримані значення показників розміру заказу Q та загальної суми витрат L, можна зробити висновок, що в усіх випадках значення Q, отримане за формулою (Q **), є економічно більш вигідним (порівняно зі значенням Q, що обирається за класичним правилом).

Висновки і пропозиції. У статті побудовано модель управління запасами, що враховує знижки, із застосуванням теорії комплексних змінних, отримані та проаналізовані результати використання моделі.

Розроблена модель буде доцільна для більш оптових замовлень. Для використання моделі можна виділити такі дві основні умови:

1. Термін використання продукції, що замовляється, повинен бути не короткостроковим.

2. Складські можливості повинні дозволяти підприємству зберігати досить великі партії запасів.

Таким чином, оскільки фінансовий успіх підприємства значною мірою залежить від раціонального управління запасами, запаси утворюються та необхідні майже будь-якому підприємству для забезпечення безперервного і ефективного функціонування, то вибір правильної стратегії управління запасами є одним із головних завдань керівників організацій. Застосування ефективної стратегії управління запасами дасть змогу підприємству відшукати оптимальний рівень запасів та необхідний строк для замовлення, а також збільшити прибуток.

Список літератури:

1. Этрилл П. Финансовый менеджмент для неспециалистов. 3-е изд. / Пер. с англ. под ред. Е.Н. Бондаревской. – СПб. : Питер, 2006. – 608 с.
2. Рыжиков Ю.И. Теория очередей и управление запасами. – СПб. : Питер, 2001. – 384 с.
3. Алесинская Т.В. Учебное пособие по решению задач по курсу «Экономико-математические методы и модели» / Т.В. Алесинская. – Таганрог : Изд-во ТРТУ, 2002. – 153 с.
4. Чорнорот Я.О. Побудова базової моделі управління запасами з використанням теорії комплексних чисел / Я.О. Чорнорот // Науковий вісник Херсонського державного університету. Серія «Економічні науки». – Херсон : Видавничий дім «Гельветика». – Вип. 11. – 2015. – С. 164-166.
5. Ломкова Е.Н. Экономико-математические модели управления производством (теоретические аспекты) : учеб. пособие / Е.Н. Ломкова, А.А. Эпов. – Волгоград : ВолгГТУ, 2005. – 67 с.

Черноротт Я. А.
Национальная металлургическая академия Украины

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ, УЧИТЫВАЮЩЕЙ СКИДКИ, С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Резюме

Управление запасами является важным звеном для успешной деятельности многих предприятий, а разработка экономико-математических моделей с применением теории комплексных переменных является перспективным направлением для расширения и совершенствования математических моделей в экономике. Теория комплексных чисел может быть применена во многих разделах экономико-математического моделирования. В статье разработана и проанализирована модель управления запасами, учитывающая скидки, с использованием теории комплексных чисел.

Ключевые слова: теория комплексных чисел, экономико-математическая модель, управление запасами, скидки, объем заказа, затраты.

Chornorot Ya. O.
National Metallurgical Academy of Ukraine

BUILDING AN INVENTORY MODEL, WHICH CONSIDERS DISCOUNTS, WITH USING THE THEORY OF COMPLEX NUMBERS

Summary

Inventory management is an important element for the success of many enterprises and the development of economic-mathematical models using the theory of complex variables is a promising avenue for the expansion and improvement of mathematical models in the economics. The theory of complex numbers can be used in many areas of economic-mathematical modelling. In this article is designed and analyzed a model of inventory management, which considers discounts, using the theory of complex numbers.

Keywords: theory of complex numbers, complex numbers, economic-mathematical model, inventory management, discount, amount of the order, costs.